

# 分形与非线性科学

杨晓东\* 张济忠

(清华大学材料科学与工程系 北京 100084)

当自然科学刚从神学中解放出来时,可以说是大量地继承了古希腊哲学家的思想和方法.伽利略,作为近代自然科学奠基者,第一次为自然科学创立了两个法则,观察实验和量化方法.伽利略用他自己制造的望远镜观察太阳系的运行,在铁塔高处向人们演示两个铁球同时着地.这是件了不起的大事:为近代物理创立了一个观察实验的法则,使近代物理从此走上以实验精确观察为基础的道路,宣告了近代物理的诞生.实际上这两个方法在古希腊已见一斑,不过未曾将这两者结合起来.毫无疑问,现成的欧几里德几何学,便成了当时自然科学发展的重要数学工具之一.诚然,作为古希腊文明的标志之一,欧几里德的几何学,以其逻辑严密的公理化演绎体系,无不令初入科学殿堂的人们倾倒,它实际为后代的自然科学起了示范作用.伽利略就曾说过,对于宇宙这本大书,“我们如果不首先学习用来描述它的语言和掌握其中的符号,我们是不能了解它的.这部著作是用数学的语言写成的,其中的符号就是三角形、圆和其他几何图形.……没有它们,人们就会在黑暗的迷宫里作毫无意义的游荡.”

古代人们认为  $1+1=2$  是天经地义的事,谁会怀疑 1 只羊再加 1 只羊不等于两只羊呢?所以经典科学从它一产生,也接受了这个事实或公理:整体和部分是简单的加和关系,也就是说叠加原理是一个普适性定理,德谟克利特用这一思想表述自然的构造图景:自然界是由许许多多的基本微粒组成,他把这种基本微粒称为原子.19世纪,科学家们在探讨物质的基本构成,他们把这一思想发扬光大,由道尔顿和阿佛加德罗首开记录,提出了原子分子学说,指出了物质是由分子和原子构成;此后,虽然人类历

经曲折,但沿着粒子无限可分的思想进行探索,取得了一个又一个的辉煌成绩.今天又有谁会怀疑分子是由原子组成的呢?

人类取得辉煌成绩,与此同时,一次又一次地加深了整体和部分这一种构成上的加和关系.

所以自然科学从它一产生,向着定量方向发展,对象间的量的关系用数学公式表达出来,形成定量化的定理或定律的一开始就毫不犹豫地用线性关系表达;牛顿力学最基本的方程是

$$f=ma$$

即质点的加速度和所受的力成正比,这是一种简单的线性关系.电磁规律的发现是19世纪物理学的重大进展之一,电磁场的变化由麦克斯韦方程所刻划,这也是一个线性的偏微分方程组.20世纪初,物理学发生了伟大的革命,建立了相对论和量子论,相对论是用两个基本原理来表达,它对牛顿力学的改造也是线性的;量子论发现了微观粒子的波粒二象性,描述它们的波函数满足薛定谔方程,它也是线性关系.

历史并非偶然.在理解整体和部分的关系问题上,或者说在理解自然层次结构上,简单的加和关系,一方面,缘于人类对复杂的自然简单的认识,缘于人类对所观察的自然范围的初级描述,更深的原因是肉眼所见的自然更多的构成是简单的堆砌;另一方面,如果刻划它的数学方程是线性的,那么求它的解是严格精确的,无歧义的,或者说是确定的,虽然可能也是复杂的,甚至是解不出来的.这种关系下,人们可以这样准确的理解自然界的发展规律:自然界事物的关系是决定论可预测的因果关系.拉普拉斯曾经夸过海口,如果给定宇宙的初始条件,我

\* 作者已毕业,地址为成都257信箱技术处(610002).

们就能预言它的未来。

因而, 19 世纪那个时代的学者竭力避免由非线性所产生的不稳定性, 避免从非线性系统中出现不稳定性目的出发来研究动态系统稳定性问题。在理解概率论的本质, 仅仅当作一种工具, 而不是涉及动力学系统的本质去理解。拉普拉斯写道: “宇宙中仍有种种事件是我们不太确切了解的, 它们是或多或少可能出现的, 我们可以通过确定各种不同程度的可能性来弥补我们不能确切认识它们的这种缺陷。因此, 可以认为, 数学中最精致、最杰出的一门理论——概率论——正是由于人类智力的这一缺陷而产生的。”不承认由非线性所引起的外在性的客观性, 把概率规律误解为人类智力的缺陷的反映, 说到底, 不能动摇他对决定论的笃信。今天的学生们学完了经典物理学, 对原子核外电子云的随机性表示怀疑, 认为它是人们现在对这种运动不能精确描述而寻找的一种模糊方法, 这不是与拉普拉斯的思想一样吗?

既然, 世界在本质上是非线性的, 所以, 用线性的方法可以作出精确解的问题, 毕竟是少数, 大量却是非线性的。从整体和局部的关系来看这个问题, 整体的各部分除了单纯的加和关系外, 还会有极其重要的相干关系, 它体现了自然的本质。所以即便是用线性的多次逼近方法, 通过解若干次线性问题而得出非线性问题近似解, 这种方法难以对大量的非线性问题奏效。

归结起来, 线性的方法对自然的理解往往是可逆的。但是, 把它们运用到自然界时, 却又呈现出不可逆性。经典力学是对可逆的刻划, 但在热力学中, 热不可能自发地从低温传到高温, 刻划它的方程却是不可逆的。相对论中不出现不可逆性, 但是当把它和量子力学运用于宇宙演化时, 发现了高能基本粒子的湮灭、转化也是不可逆的。普里高津明确指出: 不可逆的问题“已从工程的领域, 从应用化学的领域(它首先在那里被表述), 扩展到了整个物理学, 从基本粒子到宇宙学。”

这样, 本世纪 60 年代, 非线性科学就应运

而生。首先是混沌学的产生。混沌是在决定论系统中出现的明显的随机运动现象。简单地说, 就是没有随机外力, 在一定的外界初始条件下, 物理系统可以同时表现出决定的运动和随机运动。混沌运动只发生在非线性系统中, 然而, 具有混沌特征的过程比比皆是。不需作长久的观察我们自己就会确信, 有那么多过程属于我们最日常的经验。例如, 一支点燃香烟的烟雾, 或者是一杯茶水的汽雾(见图 1), 在分散成许多涡状和旋转的雾之前, 以一个细细的柱状上升。地球的大气, 是受强度不等的对流运动推动的。一片落叶并不是以直线方式落地, 而是按一条异常复杂的迂回曲折的轨迹落地。穿越空间的运动物体, 在其经过后留下一条长长的痕迹。所有这些人不熟悉的不规则的过程, 都是混沌运动的例证。混沌运动只能发生在非线性系统中。但实际中, 就拿弹簧振子来说, 线性振子只是一种理想情况, 实际的振子都具有或大或小的非线性, 可以表现出混沌的运动。混沌的一个特征是不可能用解析的方法求解。目前只能在给定参量和初值条件下用计算机对其演变进行数值计算, 它是非线性系统的一种自发无序性或内在“混乱性”的表现。混沌的一个重大特征是对初值的极端敏感性,



图 1 流动的气体的混沌运动

这也就是说, 混沌运动虽然仍是决定的, 但它同时又是不可预测的。混沌的发现, 导致了对自然规律的新的认识。混沌现象即使对非常简单的物理系统也是不可避免的, 而另一方面, 混沌又存在着惊人的有序: 从这个角度讲, 它是对自然真实的描绘。非线性的另一类是孤立波, 它是英国工程师拉塞尔 1844 年在运河中最先观察到的, 经过几代科学家的努力, 发现力场中水波在满足一定的条件下, 可以一个整体的形式运动。1985 年, 由荷兰数学家科特韦格和德弗里斯导出著名 KdV 方程

$$U_t + UU_x = U_{xxx}$$

孤立波是用此来刻划,其解比一般波的传播有“好得多”的行为,它含有许多不变化的解,整体波速也是常数(称为行波解),似乎和线性波很相似.但这些波的波形只能取某些特殊的形式,其波幅和宽度与波速有关,传播慢的波则波幅低、宽度大.不仅如此,不同波速的孤立波会发生碰撞,这时不会发生跳跃,波形连续且光滑.一段时间内,又以各自原有的速度前进,犹如弹性碰撞,这完全出人意外.基于这种性质,它对于粒子的基本属性和本质,可望获得更深的理解.笔者认为,粒子的波粒二象性等等,可从这得到更深的理解.当然这种问题的复杂性是可以想象的,只能在大型计算机进行计算.目前这种理论可以解决一些问题,但还处于发展之中.

分形产生于本世纪70年代,它以其独特的手段来解决整体和部分关系问题.许多客观对象,都有它们的空间结构,例如晶体,其特征是对称性,而另一类空间结构是自相似性,取一块理想海绵,它有许多小孔,取下一小块,它仍有许多小孔,结构与大块的相似.又如我们在冬天所见的雪花,它美丽典雅,自然之序明显坦露;仔细观察它的结构,它不是致密结构,是由自相似的小块构成,其中小块又由许多自相似的小块构成.这种具有自相似的几何对象和普通微分几何所研究的光滑曲线、曲面不同,其“曲线”可以是连续却极不光滑的.

这种自相似性,换句话说,具有标度不变性,它与现代混沌理论有明显的相同之处.正如前面所说,混沌理论揭示了许多现象即使是遵循严格的确定性规则,但大体上仍是无法预测的.诸如大气湍流或人的心脏跳动等的混沌在不同的时间标度上表现出相似的变化模式,这与具有标度不变性的物体在不同空间标度上表现出相似的结构模式十分相似.所以说,分形几何就是混沌几何.分形与混沌之间存在着这种一致性并非偶然,它们都反映了非线性科学对自然的重新理解,揭示了隐藏于现象背后的局部与本质的本质联系和运动规律.

所以说分形的产生,不仅是来自对我们周围见到的最不规则而复杂的现象如山峦和云团的外形,星系在宇宙中的分布的重新描述,更重要的是,由于认识到自然界充满了这种决定论混沌的事物.

具有这种标度不变性的分形,与传统的几何学,除了考虑自然对象的空间属性基本构思不一样(一个是从复杂的对象抽象出最简单的、具有高度代表性的图形如三角形、圆等,由这些基本图形进一步组合,形成复杂的图形;另一个是直接讨论复杂的构成),另外更重要的是对自然的抽象程度不同,前者仅仅是对日常生活中物体的空间构形的设计,而后者是对整个自然的更广阔的描述,即从整体与部分的关系问题上着眼,而且这种关系是非线性的,所以它一产生,就被广泛应用于各门科学.从这个意义讲,它是新的方法论.然而也就是如此,它的严密的量化方法至今尚未形成,仅能借助于计算机模拟.

分形的又一个重大突破是维数.传统的观念一向认为,维数是整数而不可能是分数;分形指出,维数可能是分数,也可以是整数.空间与时间的维数更多的不是整数而是分数,这意味着空间既不能被物质本身也不能被物质运动的轨迹填满.早在1890年,意大利的数学家皮亚诺构造了填充空间的曲线,这种图案,充满整个空间,但它的面积为零.在拓扑数学上,使用一个更加有用于空间度量分析的概念——连通性来表达和分析空间这种性质.实际上,完全充满整个空间的真实物体是不存在的,即使说空气,它充满空间,但是构成空气的分子,它们之间是有距离的,因而也不是完全充满空间.从更广义的角度来看,以分维存在的物体才是真正的物体.从这个意义讲,分形理论和现象破坏了时间平移对称性、空间的均匀性及旋转性,这种破坏是必须的,这种表达是对自然事物更加真实地反映.

值得特别说明的是,分形的曼德布罗特集.这项工作起源于本世纪30年代,法图和朱利亚双双开展了复多项式和有理函数迭代的研

究. 由于没有计算机的辅助, 研究工作艰难曲折. 在随后的 50 年间, 并未获得多少进展,

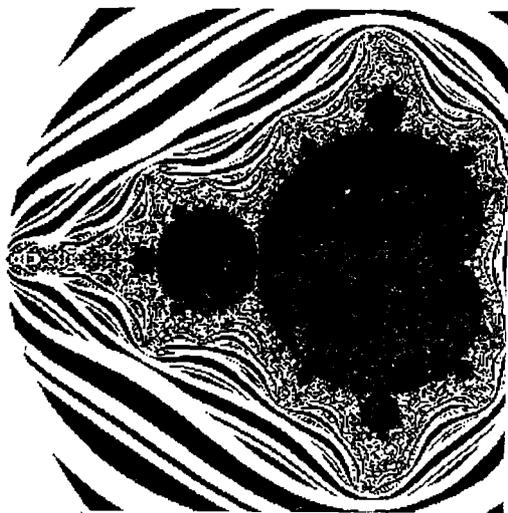


图2 曼德布罗特集合的构造

1980 年, 曼德布罗特用计算机绘出了 M-集的第一张图形, 这激起了轩然大波. M-集是一个简单的二次复多项式迭代的结果, 但 M-集的边界却是极其复杂的, 它包含了与它自身相仿的小图形, 形成一个无限嵌套的结构(见图 2). 但是 M-集的局部与整体又不是严格自相似

\*\*\*\*\*

的, 每一个微观 M-集的表现都有自己的花样, 与任一个其他微观 M-集的形状不一样. 这里既体现了整体是局部的放大, 又体现了局部的多样性, 表现了局部与整体的非线性的准同构关系.

一个如此简单的非线性二次代数式的迭代竟能创造出如此复杂的图形, 这似乎是不可思议的. 它告诉我们一个简单的道理: 在非线性的条件下, 简单系统可能演化为复杂系统, 复杂系统经过一定转换可视为简单系统. 这应该说对我们目前的物理学有很大的启示: 规范量子场和粒子碰撞中所产生的涨落结构之间的联系是不是具有混沌和分形的结构, 以及粒子本身的结构又是不是具有分形特性……我们都是不甚了解的. 不管怎么样, 分形揭示出自然界的种种复杂结构可能只是简单定律的多次操作的结果, 从一个崭新的角度为粒子物理学提供了探讨局部结构与整体之间联系的方法. 既然从场论和粒子物理学发展起来的重整化的方法、量子统计方法对于分形的研究是非常有用的, 那么, 反过来, 混沌和分形的研究是否同样也为研究整体和局部联系的粒子物理学提供了行之有效的方法呢?

她用物理的情趣引我们科苑揽胜  
她用知识的力量助我们奋起攀登

欢迎订阅《现代物理知识》

国内邮发代号 2-824 国外代号 BM609 国内外发行 各地邮局均可订阅 双月刊

《现代物理知识》, 国内外发行, 各地邮局均可订阅. 此外, 欢迎读者随时向本刊编辑部邮购, 除了 1989—1991 年 3 年的年合订本已售完外, 1992 年以后的合订本和单行本价格(均含邮费、包装费)如下:

1992 年的和 1993 年的合订本, 每本 15 元; 装有 '94 增刊“现代物理知识与教学现代

化”的 1994 年合订本, 每本 30 元; 1995 年合订本, 每本 20 元; 1996 年合订本, 每本 24 元; '93 所庆增刊, 6.50 元; '96 增刊, 6.50 元; '96 增刊, 20 元; 1997 年以前各期, 每本 2 元; 自 1997 年起, 每期 3 元, 全年 6 期 18 元.

欲购者请汇款至: 100039 北京 918 信箱“现编部”(电话: 68213344-2782).