

# 导航星全球定位系统与相对论

邹 来 智

(工程兵指挥学院物理室 徐州 221004)

导航星全球定位系统简称 GPS(Global Positioning System), 是 70 年代中期美国国防部开始发展的第二代卫星导航系统。它可以提供全球三维位置、速度和时间, 是三军通用的导航定位系统, 由导航卫星、地面站、用户设备三部分组成。

## 一、GPS 时

GPS 全球定位系统是通过测量卫星信号的传播时间来测量有关距离的, 因此导航卫星和地面站都配有稳定度为  $10^{-13}$  的精密铯原子钟, 各卫星的原子钟相互同步并与地面站的原子钟同步, 从而建立起导航系统的精密时系, 称 GPS 时. 时钟的误差将直接变成测距误差.  $1\mu\text{s}$  的钟差就相应于 300m 的距离误差, 因此, 精密时系是准确测距的基础.

## 二、相对论效应对 GPS 时的影响

相对论的时钟效应在我们日常生活中是体验不到的, 但对于从卫星到地面的精密时系来说它却是无法忽略的. 事实上, 相对论效应是 GPS 的主要误差源之一.

### 1. 狭义相对论效应

狭义相对论告诉我们, 运动时钟的“指针”行走速率比时钟静止时的速率慢, 这就是所谓的时间膨胀效应, 它是狭义相对论的主要效应之一.

由于导航卫星在高速运动, 卫星上的时钟受到时间膨胀的影响, 而比地面的时钟慢. 设

\*\*\*\*\*

这是所有波都具有多普勒效应的基础(对光波而言, 任一惯性系都可作为它的介质参照系). 在这一点上光波与其它种类的波一样, 它们没有本质的差别, 且多普勒效应是一种运动学效应, 因此, 任何波的多普勒效应公式都具有相同的形式, 如 (7) 式, 进而, 任何波包括声波都有横向多普勒效应. 这可由 (7) 式看出. (7) 式的根号因子反映了时

卫星相对地心惯性坐标系的运动速度为  $v_1$ , 地面时钟因地球自转而具有的速度为  $v_2$ , 原子钟固有周期为  $T_0$ , 则

$$\text{卫星上原子钟的周期为 } T_1 = T_0 / (1 - v_1^2 / c^2)^{1/2}$$

$$\text{地面上原子钟的周期为 } T_2 = T_0 / (1 - v_2^2 / c^2)^{1/2}$$

代表时钟快慢的时钟频率分别为  $\nu_1 = 1 / T_1$ ,  $\nu_2 = 1 / T_2$

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{(1 - v_1^2 / c^2)^{1/2}}{(1 - v_2^2 / c^2)^{1/2}} \approx 1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2}$$

$$\text{时钟的相对频差为 } \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2}$$

已知 GPS 卫星速度  $v_1 = 3.863\text{km/s}$ , 对纬度  $45^\circ$  的地面上一点  $v_2 = 0.328\text{km/s}$ , 光速  $c = 300000\text{km/s}$

$$\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} = -0.82 \times 10^{-10}$$

可见因狭义相对论效应, 卫星时钟比地面时钟每秒慢 0.082ns, 12 小时后将慢 3542ns, 如不加以修正, 将会导致不可接受的约 1km 的定位误差.

### 2. 广义相对论效应

根据广义相对论中的等效原理可以推出, 处于引力场中的时钟的频率或原子辐射的频率要受到引力势的影响而向红端移动, 称为引力红移. 如

\*\*\*\*\*

间测量的相对性, 若观测者  $D$  运动, 则  $D$  处为原时, 由于时间膨胀效应, 这将使测得的频率较非相对论考虑的结果偏大  $\frac{1}{\sqrt{1 - v_d^2 / c^2}}$ , 同理也可分析波源运动的情形. 因此, (7) 式体现了时间测量的相对性引起的效应.

果在远离引力源的  $r_1$  处观测引力源附近  $r_2$  处相应的频率, 则因引力场而产生的相对频移为

$$\frac{v_1 - v_2}{v_2} = -\frac{(\Phi(r_2) - \Phi(r_1))}{c^2} = -\frac{\Delta\Phi}{c^2}$$

式中  $\Phi(r)$  是引力势. 该关系已于 60 年代由 R. 庞德等人通过实验证实.

我们知道距地心  $r$  处的重力势为  $\Phi = -GM/r$ , 其中  $G$  为万有引力常数,  $M$  为地球的质量. 所以地面钟与卫星钟之间的重力势差为:

$$\Delta\Phi = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) = -GM/R + GM/(R+H)$$

已知  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{s}^2\text{kg}$ ,  $M = 5.98 \times 10^{24} \text{kg}$ , 卫星高度  $H = 2.05 \times 10^7 \text{m}$ , 地球半径  $R = 6.37 \times 10^6 \text{m}$ , 代入上式可计算出  $\Delta\Phi = -4.77 \times 10^7 \text{m}^2/\text{s}^2$ . 所以卫星钟与地面钟之间的相对频差为

$$\frac{v_1 - v_2}{v_2} = -\frac{\Delta\Phi}{c^2} = 5.30 \times 10^{-10}$$

综合以上两种相对论效应, 卫星钟实际上比地面钟快, 且

$$\frac{v_1 - v_2}{v_2} = 4.48 \times 10^{-10}$$

### 3. SAGNAC 效应

Sagnac 效应是在使不同位置处的钟相互同步时表现出来的. 我们知道使钟同步一般有两种方法. ①将一只标准钟在原点同原点的钟对准, 然后将它逐次移到空间各点来把所有的钟对准. 但事先必须知道移动的过程中对标准钟的快慢会产生什么影响. ②从某一空间点(例如从坐标原点)于某一时刻将光信号发射到空间各点, 用以校准时钟. 但事先必须知道光信号在空间各个方向的速度. 根据大量的实验事实, 爱因斯坦提出, 在一惯性系中, 光速是各向同性的, 因此可以利用光信号使时钟同步, 这

就是所谓的爱因斯坦同步.

导航星全球定位系统就是利用光信号使精密时系中的时钟同步的. 但由于地球自转, 从地心惯性系看, 地面的时钟在作圆周运动, 这时光信号在给定距离上的传输时间与传输方向有关, 不再是定值. 这种现象被称为 Sagnac 效应.

例如我们沿东西向在地球赤道固定两点  $A$ 、 $B$ ,  $AB$  相距  $x$ . 现在我们由  $A$  向  $B$  发射光信号. 地面观察者容易得出光信号由  $A$  到  $B$  和由  $B$  到  $A$  的时间均为  $t = x/c$ . 而从固定在地心的不旋转坐标系观察,  $A$ 、 $B$  以相等的速度  $v$  运行. 光信号由  $A$  到  $B$  的时间为  $t_1 = x/(c-v)$ , 由  $B$  到在  $A$  的时间为  $t_2 = x/(c+v)$ . 如果仍然认为是  $t = x/c$  就会造成系统误差.

### 三、相对论效应的修正

通过前面的计算我们已经知道, 相对论效应使导航星时钟较地面时钟产生了  $4.48 \times 10^{-10}$  的相对偏差, 必须加以修正. 办法之一是把卫星钟的标准振荡频率减小  $4.48 \times 10^{-10}$ , 即卫星钟上的 10.23MHz 的标准频率应降为  $10.23 \times (1 - 4.48 \times 10^{-10}) \text{MHz} = 10.2299999545 \text{MHz}$ . 这样加上相对论效应后卫星钟就和地面原子钟保持的 GPS 时大致相同了.

由于卫星所处的引力场是变化的, 同时还受到太阳和月亮引力场的作用, 而且卫星轨道偏心率并不等于零 ( $e = 0.01$ ), 所以相对论效应产生的误差并不是常值, 因此需要采取其它的补偿措施, 如 GPS 系统向用户发出有关补偿数据, 由用户自行补偿等.

GPS 系统也要求用户对时间进行 Sagnac 效应修正, 一般是在软件中进行, 这里就不做介绍了.

GPS 系统中的相对论效应是明显的. 当人们运用 GPS 为飞机、导弹等作精密导航时, 不会忘记爱因斯坦相对论的巨大成就.

\*\*\*\*\*

## 第十届全国理论物理基础前沿研讨会

第十届全国理论物理基础前沿研讨会于 1996 年 7 月 15 日—18 日在湖北丹江口市召开. 到会代表 30 人, 张端明等 18 位专家、学者在会上作了专题学术报告或宣读了论文.

大会得到丹江口市党政领导的热情支持和关怀, 全体代表对该市党政领导支持基础理论研究的远见卓识表示敬佩. 对全体工作人员的敬业精神表示感谢. 初步计划第十一届全国理论物理基础前沿研讨会于 1998 年在太原召开.

全体代表对本届学术讨论会的组织单位华中理工大学和武钢职工大学深表谢意.

(赵国求 供稿)