声光多普勒效应公式的统一

路　峻　岭

(清华大学物理系　北京　100084)

当波源与观测者之间有相对运动时，观测到的频率与波源发出的频率不同的现象称为多普勒效应，它是由奥地利物理学家多普勒于1842年首先发现的. 后来，光波的多普勒效应也在实验中被观测到. 然而，声波和光波的多普勒效应公式具有不同的形式，例如，观测者 D 静止，波源 s 以速度 v_s 趋向观测者 D 运动时，波源 s 发出的频率 f_s 与观测到的频率 f_d 之间有以下关系.

对于声波，
$$f_d = \frac{f_s}{1 - v_s / v} \tag{1}$$
式中 v 为声速；

对于光波，
$$f_d = \sqrt{\frac{1 + v_s / c}{1 - v_s / c}} f_s \tag{2}$$
式中 c 为光速.

两种波的多普勒效应公式形式上的差异是说明两种波各自遵从不同的规律呢，还是这两种形式是一种普适的多普勒效应公式在不同条件下的特例呢？ 回答是后者. 本文试从把多普勒效应理解为波的频率的洛仑兹变换出发，推导统一的，既适用于声波也适用于光波的普适的多普勒效应公式.

* *

坏晶格，而晶格损伤是很难得到恢复的. 能量范围在5—20keV的X射线对CCD的辐射损伤可以通过紫外线照射，或者用简单加热退火处理就能得到恢复，使CCD具有长的使用寿命.

(3)大面积高分辨率

这里仅以美国 APS 实验室研制的“GOLD”探测器为例，它的灵敏面积为150×150mm^2，分辨本领为3072×3072点阵(象素)，空间分辨率为75μm，探测量子效率为82%，读出时间1.8秒. 它是目前性能比较好的CCD X射线探测器.

CCD探测器在新一代同步光源研究中的应用主要有：(1)生物大分子和蛋白质结构研究. 因为生命科学是本世纪和下个世纪重点科研课题之一；(2)Laue衍射图. 随着巨型计算机的出现，大大地增强了实验数据的处理能力. 因此就有可能用Laue方法有效的解出晶体结构来. 可以节省许多实验时间. 这对生命科学和材料科学都是非常重要的；(3)X射线散射实验. 测量高分子聚合物和生物样品的散射强度，以及时间依赖的动态过程，对于了解物质的结构和性质是很有兴趣的课题. 除此而外，CCD还是一种好的粒子探测器，在医学成像，图象传送，夜视仪器等方面都有许多应用. 这里不予多述.

对CCD X射线探测器而言，正面临着发展的机遇和有力的挑战. 第三代同步光源的建造为发展CCD带来机遇，同时，由于其它众多探测器的发展也向CCD提出了挑战. 蛋白质晶体学和医学成像领域的一个重要要求，是增加CCD灵敏面积，利用光纤耦合CCD阵列，或者采用大面积像增强器的办法可以解决这个问题. CCD面临的另一个挑战是高空间分辨率，目前CCD最小单元尺寸是6.8×6.8μm，如果在第三代同步光源的Undulator(波荡器)上研究X射线相干问题，就会用到光子关联谱仪. 由此，高空间分辨率就是相干X射线探测所必须的，它将促进高分辨率CCD X射线探测器的发展. 作为同步辐射研究的一种实验手段，CCD也不是完美无缺的，能量分辨很差. 我们深信，随着时间的推移，CCD X射线探测器必将在同步辐射研究中发挥更大作用.

大家熟知，狭义相对论条件下的时空变换遵从洛仑兹变换. 若定义 $X_1=x, X_2=y, X_3=z, X_4=ict$，则洛仑兹变换实际上是 (X_1, X_2, X_3, X_4) 4 维空间中的一个正交变换. 时间必须与空间联系在一起作为一个整体进行变换，这是狭义相对论的重要结果. 类似时空变换，波的频率也必须和波数矢量联系在一起作为一个整体进行变换. 对此，可参阅朗道《场论》p.135. 由此可以得出两惯性参照系间波的频率的变换公式

$$\omega' = \frac{\omega - uK_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{3}$$

式中，ω 表示圆频率，$\omega=2\pi f$，u 表示两惯性系沿共同的 x 轴运动的相对速度，c 为光速，K_x 表示波数矢量在 x 轴方向的投影，即波矢的 x 方向分量.

我们来研究波源和观测者都运动的最一般的情况. 设我们站在与传播波的介质保持相对静止的参照系中观察到，波源 s 以速度 v_s 沿与波矢 K 成 θ_s 角的方向运动；观测者 D 以速度 v_d 沿与波矢 K 成 θ_d 角的方向运动，如图 1 所示.

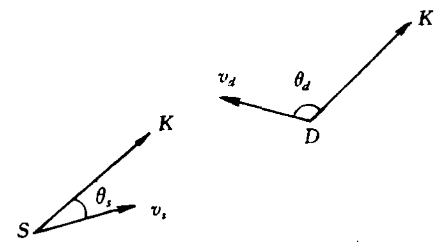

图 1

让我们来计算观测者 D 测得的波的频率 f_d. 这要分两步走，先求介质参照系中的圆频率 ω_0，再求出观测者测得的频率 f_d.

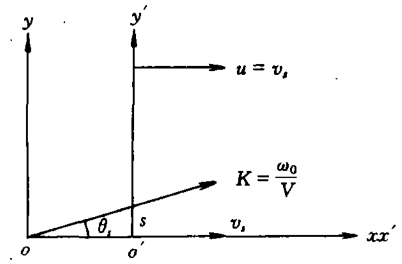

图 2

首先，建立坐标系如图 2 所示. xoy 系属介质参照系，源 s 位于运动坐标系原点 o'. 在介质系中，波数矢量 K 的模为 ω_0/V，其中 V 为波速，且各向同性，这样 $K_x=(\omega_0/V)\cos\theta_s$，运用(3)式，以 ω_s 表示波源振动的圆频率，则有

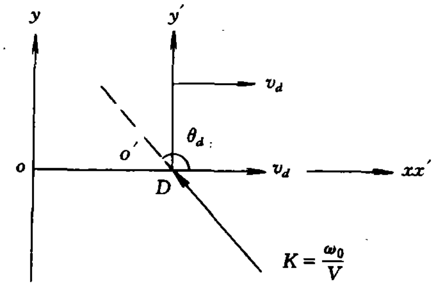

图 3

$$\omega_s = \omega' = \frac{\omega_0\left(1-\frac{u}{V}\cos\theta_s\right)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{4}$$

其中，$u=v_s$，故有 $\omega_0 = \dfrac{\omega_s\sqrt{1-v_s/c^2}}{1-\frac{v_s}{V}\cos\theta_s}$ (5)

再建立坐标系如图 3 所示，观测者 D 位于运动坐标系的原点 o'，坐标系 xoy 静止于介质参照系中，在介质参照系中，$K=\omega_0/V$，$K_x=(\omega_0/V)\cos\theta_d$，运用(3)式得

$$\omega_d = \omega' = \frac{\omega_0\left(1-\frac{v_d}{V}\cos\theta_d\right)}{\sqrt{1-v_d^2/c^2}} \tag{6}$$

将(5)式代入(6)式，并运用 $\omega=2\pi f$，整理可得

$$f_d = f_s\sqrt{\frac{1-v_s^2/c^2}{1-v_d^2/c^2}}\cdot\frac{1-\frac{v_d}{V}\cos\theta_d}{1-\frac{v_s}{V}\cos\theta_s} \tag{7}$$

式中 f_d 表示观测到的频率，f_s 表示波源振动频率. 这就是我们要找的普适的多普勒效应公式. 若 v_s 和 $v_d \ll c$，则根号因子为 1，(7)式便是非相对论条件下的多普勒效应公式；若所研究的是光波，波速 $V=c$，(7)式便表示光波的多普勒效应. 非相对论情况下，若 $v_d=0$，$\theta_s=0$，由(7)式得到(1)式；对于光波，波速 $V=c$，若 $v_d=0$，$\theta_s=0$，由(7)式可得到(2)式. 可见(1)式和(2)式都是(7)式在一定条件下的特例.

需要指出的是，一切波都有它自己的所谓介质参照系，在此参照系中，波速保持定值且与方向无关，特别重要的是波速与波源速度无关，

导航星全球定位系统与相对论

邹　来　智

（工程兵指挥学院物理室　徐州　221004）

导航星全球定位系统简称 GPS（Global Positioning System），是 70 年代中期美国国防部开始发展的第二代卫星导航系统。它可以提供全球三维位置、速度和时间，是三军通用的导航定位系统，由导航卫星、地面站、用户设备三部分组成。

一、GPS 时

GPS 全球定位系统是通过测量卫星信号的传播时间来测量有关距离的，因此导航卫星和地面站都配有稳定度为 10^{-13} 的精密铯原子钟，各卫星的原子钟相互同步并与地面站的原子钟同步，从而建立起导航系统的精密时系，称 GPS 时. 时钟的误差将直接变成测距误差. $1\mu s$ 的钟差就相应于 300m 的距离误差，因此，精密时系是准确测距的基础.

二、相对论效应对 GPS 时的影响

相对论的时钟效应在我们日常生活中是体验不到的，但对于从卫星到地面的精密时系来说它却是无法忽略的. 事实上，相对论效应是 GPS 的主要误差源之一.

1. 狭义相对论效应

狭义相对论告诉我们，运动时钟的“指针”行走速率比时钟静止时的速率慢，这就是所谓的时间膨胀效应，它是狭义相对论的主要效应之一.

由于导航卫星在高速运动，卫星上的时钟受到时间膨胀的影响，而比地面的时钟慢. 设卫星相对地心惯性坐标系的运动速度为 v_1，地面时钟因地球自转而具有的速度为 v_2，原子钟固有周期为 T_0，则

卫星上原子钟的周期为 $T_1=T_0/(1-v_1^2/c^2)^{1/2}$

地面上原子钟的周期为 $T_2=T_0/(1-v_2^2/c^2)^{1/2}$

代表时钟快慢的时钟频率分别为 $\nu_1=1/T_1$、$\nu_2=1/T_2$

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{(1-v_1^2/c^2)^{1/2}}{(1-v_2^2/c^2)^{1/2}}\approx 1+\frac{v_2^2-v_1^2}{2c^2}$$

时钟的相对频差为 $\dfrac{\nu_1-\nu_2}{\nu_2}=\dfrac{v_2^2-v_1^2}{2c^2}$

已知 GPS 卫星速度 $v_1=3.863\text{km}/\text{s}$，对纬度 45° 的地面上一点 $v_2=0.328\text{km}/\text{s}$、光速 $c=300000\text{km}/\text{s}$

$$\frac{\nu_1-\nu_2}{\nu_2}=-0.82\times 10^{-10}$$

可见因狭义相对论效应，卫星时钟比地面时钟每秒慢 0.082ns，12 小时后将慢 3542ns，如不加以修正，将会导致不可接受的约 1km 的定位误差.

2. 广义相对论效应

根据广义相对论中的等效原理可以推出，处于引力场中的时钟的频率或原子辐射的频率要受到引力势的影响而向红端移动，称为引力红移. 如

* *

这是所有波都具有多普勒效应的基础（对光波而言，任一惯性系都可作为它的介质参照系）. 在这一点上光波与其它种类的波一样，它们没有本质的差别，且多普勒效应是一种运动学效应，因此，任何波的多普勒效应公式都具有相同的形式，如(7)式，进而，任何波包括声波都有横向多普勒效应. 这可由(7)式看出. (7)式的根号因子反映了时间测量的相对性，若观测者 D 运动，则 D 处为原时，由于时间膨胀效应，这将使测得的频率较非相对论考虑的结果偏大 $\dfrac{1}{\sqrt{1-v_d^2/c^2}}$，同理也可分析波源运动的情形. 因此，(7) 式体现了时间测量的相对性引起的效应.