

“浴盆涡旋”现象的一种解释

王存茂

(炮兵指挥学院 宣化 075100)



“浴盆涡旋”、台风的气旋等自然现象,在转动的地面非惯性系中看来是由科里奥利惯性力引起的. 本文用普通物理的方法,先在地面惯性系中应用角动量守恒定律和流体连续性方程求得涡旋的流线方程,再通过简单的极坐标变换,得到涡旋在地面非惯性系中的流线方程.

如图 1 所示,设在北半球纬度为 λ 处地面上的 O 点周围有一半径为 r_0 的水池,池中心 O 点有一排水孔. 在水池周边半径为 r_0 的圆周上均匀地分布着许多径向放置的注水管. 通过这些注水管从水池周边向水池内稳定均匀地注入水流,注入流量等于由排水孔排出的流量,故池内水流为稳定流动.

以 O 为原点建立两个坐标系 xyz 及 XYZ . xyz 系与地面固连随地球一起自转,为地面非惯性系. x 轴沿地面指向正东, y 轴指向正北, z 轴沿铅垂线向上. XYZ 系在 $t=0$ 时刻与 xyz 系重合,其三坐标轴分别指向遥远的恒星. 考虑地球自转角速度很小半径较大,可认为原点 O 作匀速直线运动,所以 XYZ 系为地面惯性系. 地球(即 xyz 系)自转角速度 $\vec{\omega}$ 在 Y, Z 轴上的

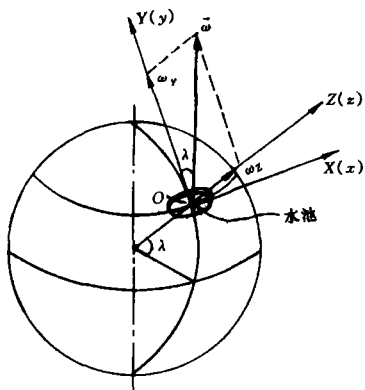


图 1

投影为 $\omega_y = \omega \cos \lambda, \omega_z = \omega \sin \lambda$.

为方便,作如下两点假设: 1. 假定水为不可压缩的理想流体. 2. 由于 ω_y 对水流形状影响不大,不予考虑. 只考虑 ω_z 对水流形状的影响. 根据第二点假设可以断定水池中以 O 为中心同一圆周上的各个水质点运动轨迹的形状相同,且以 O 为中心对称.

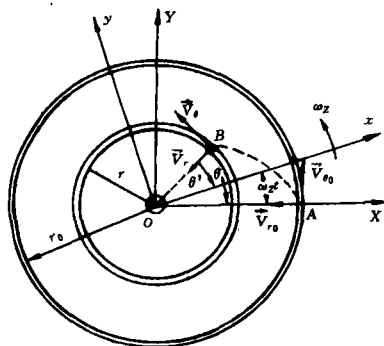


图 2

如图 2 所示,以 O 为中心分别以 OX, OY 为极轴建立惯性极坐标系(以 θ 为极角, r 为极径)及非惯性极坐标系(以 θ' 为极角, r' 为极径). 在两极轴重合的 $t=0$ 时刻,靠近水池边缘取半径为 r_0 的水流薄圆环,如图 2. 圆环的高度即为水深 h ,圆环的质量为 Δm .

首先研究 r_0 圆环上各水流质点相对于惯性系的运动方程. 在 $t=0$ 时刻, r_0 圆环上各水质点相对于地面非惯性系来说,只有方向指向 O 的径向速度(设其大小为 V_r)而无周向速度. 但是相对于地面惯性系来说,根据速度合成定理,水质点的绝对速度除有径向的相对速度 V_r 外,还包括随地面一起转动而引起的周向牵连速度 V_{θ_0} ,其大小为 $V_{\theta_0} = \omega_z r_0 = r_0 \omega \sin \lambda$. 图 2 中表示了在 $t=0$ 时刻水流薄圆环上位于极轴 OX 上 A 点的水质点的两种速度. 即 $\vec{v}(0) = \vec{V}_r + \vec{V}_{\theta_0}$. 随着排水过程的进行,水流薄圆环的半径逐渐减小,在 t 时刻减小为 r . 原处于 A 点

的水质点在 t 时刻运动到图 2 中的 B 点, 其速度为 $\vec{v}(t) = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$. 图中虚线 \widehat{AB} 表示在 t 时间内水质点相对于地面惯性系的运动轨迹.

分析水流薄圆环在惯性系中的受力(惯性系中不存在惯性力), 所受重力与池底对其支持力均在竖直方向. 由于是理想流体, 水流薄圆环所受到的池底的摩擦力及其内外侧面所受到的内摩擦力均不计, 而内外侧面所受到的正压力均沿径向, 于是在水池排水过程中, 水流薄圆环的角动量是守恒的. 根据角动量守恒定律有

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r_0}{r^2} V_{\theta_0} = \frac{r_0^2}{r^2} \omega \sin\lambda \quad (1)$$

在稳定流动条件下, 流入 r_0 圆柱面的流量等于流出 r 圆柱面的流量, 根据连续性方程有

$$2\pi r h \frac{dr}{dt} = 2\pi r_0 h (-V_{r_0})$$

得到 $r = \sqrt{r_0(r_0 - 2V_{r_0}t)}$ (2)

把(2)式代入(1)式得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r_0 \omega \sin\lambda}{r_0 - 2V_{r_0}t} \quad (3)$$

(3)式积分得到

$$\theta = \frac{r_0 \omega \sin\lambda}{2V_{r_0}} \ln \frac{r_0}{r_0 - 2V_{r_0}t} \quad (4)$$

(2)、(4)两式即为水流质点相对于地面惯性系的运动方程. 二者消去 t 得轨迹方程

$$r = r_0 e^{-\frac{V_{r_0}}{\omega \sin\lambda} \theta}$$

或 $\theta = \frac{r_0 \omega \sin\lambda}{V_{r_0}} \ln \frac{r_0}{r}$

上面两式说明水流质点在地面惯性系中的运动轨迹为对数螺线.

我们是站在地面上观察排水过程, 最终要得出水流相对于地面的运动规律. 在地面非惯性极坐标系中考察水流质点的运动, 其径向运动方程与在惯性极坐标系中的径向运动方程相同, 仍为(2)式, 即

$$r' = r = \sqrt{r_0(r_0 - 2V_{r_0}t)}$$

接下来求极角 θ' . 由于地面非惯性系(以 ox 代

表)相对于地面惯性系(以 Ox 代表)存在着转动角速度 $\omega_z = \omega \sin\lambda$, 故在地面非惯性系中, 水质点的极径转动的角速度 $d\theta'/dt$ 要比在地面惯性系中极径的角速度 $d\theta/dt$ 小一个 $\omega \sin\lambda$ 的量, 即

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \omega \sin\lambda$$

把(3)式代入上式得

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{2V_{r_0}t}{r_0 - 2V_{r_0}t} \omega \sin\lambda \quad (5)$$

由(2)式可知 $r_0 - 2V_{r_0}t > 0$, 据此可知(5)式中 $d\theta'/dt$ 的正负决定于 ω_z , 在北半球 $\omega_z = \omega \sin\lambda > 0$, 说明在地面观察到的涡旋转向为逆时针; 在南半球 $\omega_z = -\omega \sin\lambda < 0$, 说明涡旋转向为顺时针. 积分(5)式得

$$\theta' = \frac{r_0 \omega \sin\lambda}{2V_{r_0}} \ln \frac{r_0}{r_0 - 2V_{r_0}t} - \omega (\sin\lambda) t \quad (6)$$

其实上式可直接由(4)式减去 $\omega (\sin\lambda) t$ 而得到. (2)、(6)两式即为水流质点在地面非惯性系中的运动方程, 两式消去 t 后得到轨迹方程为

$$\theta' = \frac{r_0 \omega \sin\lambda}{V_{r_0}} \left(\ln \frac{r_0}{r} - \frac{r_0^2 - r^2}{2r_0^2} \right) \quad (7)$$

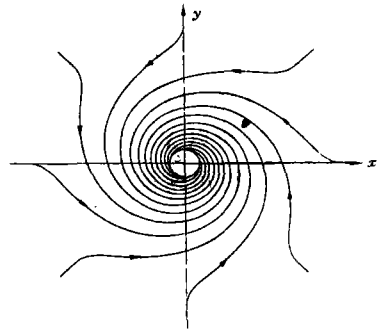


图 3

上式也就是涡旋在地面非惯性系中的流线方程.

若令(7)式中的 $r_0 = 100\text{m}$, $\lambda = 40^\circ$, $V_{r_0} = 0.001\text{m} \cdot \text{S}^{-1}$, 则可按此例作出如图 3 所示的涡旋图形. 它接近于在北半球地面上所观察到的涡旋的实际情况.