

质点系相对任意动点的动量矩定理及应用

栗 晓

(武钢职工大学 武汉 430080)

一般工科院校的《理论力学》教材中,关于质点系动量矩定理中矩心的选取有相对于某一固定点的和相对于系统质心的,且大多都作了较为详尽的论述.然而,随着工业技术的迅速发展,尤其是机构学的发展,愈来愈多地要求了解机械系统相对任意动点的动量矩变化规律.因此,讨论质点系对任意动点的动量矩定理对工业技术而言有其现实的意义.

设矩心 O 相对惯性系 $o_0x_0y_0z_0$ 作任意运动,以 O 为原点建立与惯性系 $o_0x_0y_0z_0$ 各轴平行的平动坐标系 $oxyz$,如图 1 所示.在计算质点系对任意动点的动量矩时,由于系统诸质点存在着相对于惯性系 $o_0x_0y_0z_0$ 的绝对运动以及相对于平动坐标系 $oxyz$ 的相对运动.因此,必须区分质点系的这两种运动.相应地,质点系的动量矩定理亦有两种表达形式.

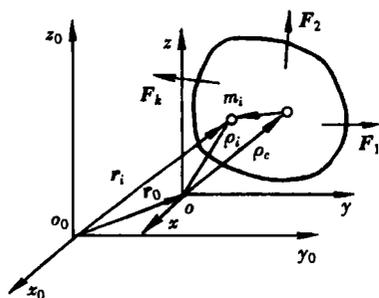


图 1

一、质点系对任意动点的绝对动量矩定理

质点系对任意动点的绝对动量矩定理可表述为:

$$\frac{dH_0}{dt} = M_0 + Q \times v_0 \quad (1)$$

或

$$\frac{dH_0}{dt} = M_0 + mv_c \times v_0 \quad (1')$$

即:质点系对动点的动量矩对时间的导数等于质点系的外力对该动点的矩以及质点系的动量与动点速度的矢积之和.

式中, H_0 为根据绝对速度计算的质点系对动点 O 的动量矩,即 $H_0 = \sum \rho_i \times m_i r_i$; M_0 为质点系的所有外力对动点 O 的矩,即 $M_0 = \sum M_0(F_i^e)$; Q 为根据绝对速度计算的质点系的动量,即 $Q = \sum m_i r_i = mv_c$,其中 m 为质点系总质量, v_c 为质点系质心的绝对速度; v_0 为动点 O 相对于惯性系 $O_0x_0y_0z_0$ 的速度.对 H_0 的进一步推导,可得

$$H_0 = H_c + \rho_c \times mv_c \quad (2)$$

即:质点系对动点的动量矩等于质点系对质心的动量矩与质点系的动量对质心的矩之矢量和.显然,由于 H_0 是根据绝对速度计算的质点系对动点的动量矩,由此得到的动量矩定理我们称之为质点系相对于动点的绝对动量矩定理.

二、质点系对任意动点的相对动量矩定理

质点系对任意动点的相对动量矩定理可表述为:

$$\frac{dH'_0}{dt} = M_0 + \rho_c \times (-ma_0) \quad (3)$$

即:质点系对动点 O 的相对动量矩对时间的导数,等于质点系的外力对该点的矩与加在质心 C 上的牵连惯性力 $(-ma_0)$ 对该动点的矩的矢量和.式中,质点系对动点 O 的相对动量矩 H'_0 是根据系统中诸质点相对动系 $Oxyz$ 的速度计算的对动点 O 的动量矩,即 $H'_0 = \sum \rho_i \times m_i \rho_i$; 而系统中诸质点的牵连惯性力 $(-m_i a_0)$ 的合力必通过系统的质心 C ,因此,式(3)右端的第二项相当于将质点系全部质量集中于质心处的质点的牵连惯性力对动点 O 的矩.同样,对 H'_0 的进一步推导,可得

$$H'_0 = H_c + \rho_c \times Q' \quad (4)$$

即：质点系对动点的相对动量矩等于质点系对质心的动量矩与质点系的相对动量对该动点的矩之矢量和。

对于平面运动问题，比如质点系在 oxy 平面上运动，则可将式(1)、(3)向以动点为原点的平动坐标系投影，得到质点系对过动点 O 的平动轴的绝对动量矩定理或相对动量矩定理：

$$\frac{dH_{oz}}{dt} = M_{oz} + mv_c \times v_0 \Big|_z \quad (5)$$

$$\text{或} \frac{dH'_{oz}}{dt} = M_{oz} + \rho_c \times (-ma_0) \Big|_z \quad (6)$$

相应地，式(2)、(4)亦可作类似处理。考虑到式(1)、(3)或(5)、(6)是动量矩定理的导数形式，因此，上述诸式中等号左边的动量矩应是函数意义下的力学量，而等号右边的力学量则可以具有瞬时意义。

例：一根长 l 质量为 m 的均质杆垂直放在光滑水平面上。试求杆由静止向下滑落至与铅垂方向成 θ 角时的角加速度。

解：取均质杆为研究对象，所受外力有重力

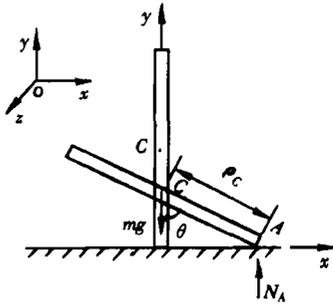


图 2

mg 和 A 处的约束反力 N_A ，下面我们以杆端 A 点为矩心分别应用质点系的绝对动量矩定理和相对动量矩定理建立均质杆的运动微分方程并求解。

(1) 应用质点系的绝对动量矩定理求解考虑到均质杆作平面运动，均质杆对动点 A 的动量矩为

$$H_{AZ} = H_{CZ} + \rho_c \times mv_c \Big|_z$$

$$\text{其中 } \rho_c = -\frac{l}{2} \sin\theta i + \frac{l}{2} \cos\theta j$$

$$v_c = -\frac{l}{2} \sin\theta \cdot \dot{\theta} j$$

$$\rho_c \times mv_c = \frac{1}{4} ml^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\theta} k$$

$$H_{AZ} = \frac{1}{12} ml^2 \cdot \dot{\theta} + \frac{1}{4} ml^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\text{而 } v_A = \frac{1}{2} l \cos\theta \cdot \dot{\theta} i$$

则 $mv_c \times v_A$

$$= \frac{1}{4} ml^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 k$$

$$M_{AZ} = \frac{1}{2} mgl \sin\theta$$

根据式(5)可得：

$$\frac{1}{12} ml^2 (1 + 3\sin^2\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2} mgl \sin\theta - \frac{1}{4} ml^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

由动能定理，求出 $\dot{\theta}^2$ 后代入上式即可求得：

$$\ddot{\theta} = \frac{6g \sin\theta (4 + 3\cos^2\theta - 6\cos\theta)}{(1 + 3\sin^2\theta)^2 l}$$

(2) 应用质点系的相对动量矩定理求解均质杆对动点 A 的相对动量矩为

$$H'_{AZ} = H_{CZ} + \rho_c \times Q' \Big|_z$$

其中， Q' 为均质杆相对以 A 点为原点的平动坐标系的动量，即

$$Q' = m(v_c - v_A)$$

$$\rho_c \times Q' = \frac{1}{4} ml^2 \cdot \dot{\theta} k$$

因此，

$$H'_{AZ} = \frac{1}{3} ml^2 \cdot \dot{\theta}$$

$$\text{而 } a_A = \left(\frac{1}{2} l \cos\theta \cdot \ddot{\theta} - \frac{1}{2} l \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 \right) i$$

$$- \rho_c \times ma_A$$

$$= \frac{1}{2} ml \cos\theta \left(\frac{1}{2} l \cos\theta \cdot \ddot{\theta} - \frac{1}{2} l \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 \right) k$$

根据式(6)并将利用动能定理求得的 $\dot{\theta}^2$ 代入，

边远少数民族地区

物理教育专业主干课的改革与实践

于少英

(内蒙古民族师范学院物理系 通辽 028043)

为了更好地贯彻落实《中国教育改革与发展纲要》和全国师范教育工作会议精神,进一步推动高师教育教学改革工作,原国家教委组织实施“高等师范教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”,师范司于 1998 年 4 月下达文件,在各省推荐的 941 个申报项目中批准 210 个项目为部级项目. 其中物理专业的部级项目 16 项,我系的“面向 21 世纪边远少数民族地区物理教育专业主干课的改革与实践”是本次的 16 个部级项目之一,并且是物理专业唯一一项边远少数民族地区高师院校的项目. 本文介绍本项目立项和实施的有关问题,期望引起关心教育的同行专家的关注和讨论.

一、项目的意义

当今社会的经济、政治正发生着深刻的变化,科学技术迅速发展,而且各学科之间相互交叉、渗透. 物理学科是新科学、新技术、新知识的基础. 世纪之交,各国政府都在为迎接下个世纪更加激烈的经济、科技、管理、军事等全方位竞争而采取战略举措. 各种竞争,归根结底是人才的竞争,是民族整体素质的竞争. 今天的人才只是昨天的教师培养的,未来的高素质人才靠明天的教师培养. 因此,科教兴国需教育优先,发展少数民族地区的教育需师范先行,师范教育的改革与发展必须放在优先地位予以重视早已经成为人们的共识.

近年来的实践证明,随着社会主义市场经济体系的确立,在经济不发达、文化相对落后的边远少数民族地区,高水平的师资和其它科技人才不大可能从内地发达地区引进,主要得靠自己培养. 如果我们对师范教育的改革与发展不予以重视,我们与先进地区的差距将进一步拉大,提高民族的整体素质也就成为空话. 本项目针对边远少数民族地区高等师范院校在教改中面临的许多特殊问题,即所在地区的经济相对落后、信息较闭塞,学院办学的资金短缺,学生的入学起点低等等,根据边远少数民族地区物理教育专业的特点,通过对主干课程教学内容与课程体系的改革与实践,研究和探索如何培养高素质的人才,缩小与先进地区的差距,并且把研究过程和发展地方的教育和经济建设紧密结合,把研究过程和本单位的教学改革实践紧密结合,边研究,边实践,使边远少数民族地区的高师院校真正肩负起为本地区教育发展和经济腾飞做贡献的使命. 本项目对于在边远少数民族地区的高师院校推进教学改革,培养 21 世纪的高素质教师和其他人才,对于全面贯彻党的教育方针,提高办学质量和办学效益,具有重要的理论和实践意义.

二、研究的目标和内容

本项目的研究将首先通过对内蒙古地区一些有代表性的中学、中专、技校和高师专科学校

同样可以求出与(1)中的结果完全一致的 β 值.

由式(1)和式(3)以及算例中可以看出,由于矩心作任意运动,使动量矩定理中增加了与矩心的速度或加速度有关的附加项 $v_c \times Q$ 或 $\rho_c \times ma_c$,从而为计算带来了一些困难. 但是,这

种方法对于计算一些实际问题却很有用. 因此,对于成人高校的机械类专业,适当增设这方面的选修内容,这对于开拓学生知识面,提高其解决实际问题的能力则大有裨益.