空化—2023亚洲物理奥林匹克竞赛理论第三题

许　鸣[1]　宋　峰[2]

（1. 海南微城未来教育学校 571541；2. 南开大学物理科学学院 300071）

背景介绍

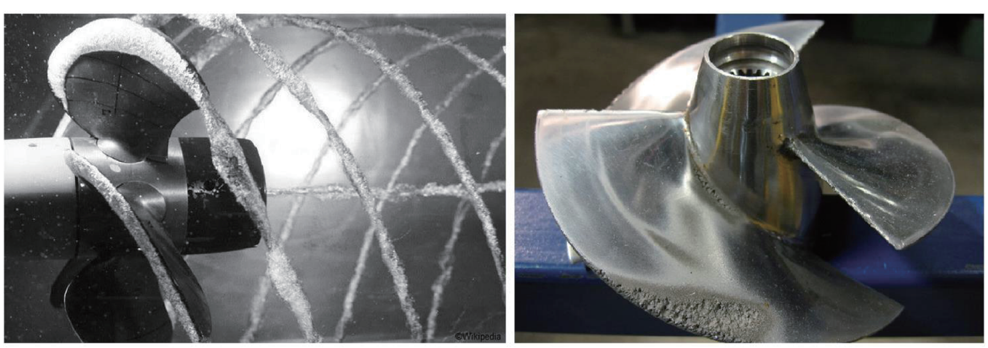
空化是指由于压力降低而在液体中形成气泡或“空腔”的现象，这与因温度上升而产生气泡的沸腾现象有所不同。当压力恢复至正常值时，空化气泡会发生坍缩，并伴随产生冲击波及超音速射流。因此，在涉及液体流动的设备如液压机械和船舶中，空化可能会造成持续性的损害，甚至引发灾难性后果(如图1所示)。然而，空化也有其积极的一面，在化学工业、污水处理以及医学领域(例如治疗肾结石)等方面有着广泛的应用。

通常认为，空化现象是由原本存在于液体中的小气泡(称为空化核)发展而来的。空化核大小约为几微米，包含蒸汽和不可凝结气体(对于普通水而言，后者主要指空气)。如果液体中的压力足够低，空化核就会增长至宏观尺寸而引发空化现象。若液体中不存在空化核，则可承受负压而不发生空化。这与处于拉伸状态下的固体相类似，即如果固体内部原本不存在孔洞或裂缝，则被拉伸的固体就不容易出现破裂。

在本题中，我们将关注与空化现象相关的各种理想化问题。一般情况下，我们可以通过简单的量纲分析获得一些有价值的信息。不过，如果我们想进行更精确的研究，就需要运用到一些基本定律的微分方程，如牛顿第二定律和菲克定律。

首先是临界(或阈值)压强，即可使空化核保持在微观状态而不形成宏观气泡的最小水压。临界压强近似等于给定温度下的蒸汽压，但考虑到表面张力和空化核中的空气含量，实际值可能略低。

如果外部压力突然降至空化核的临界压力以下，则空化核会开始膨胀，且膨胀速率会迅速达到一个稳定值。实际情况下，当气泡增长至宏观尺寸后，外部压力通常会恢复至初始值，因此气泡开始坍缩。我们可以通过设想一个处于平衡状态的宏观气泡，并假设其外部压力突然升高，来模拟这种情况。如果气泡中含有空气，坍缩的气泡在达到最小尺寸后会反弹；但对于纯蒸汽气泡，随着气泡半径趋于零，坍缩速率将会无限增大，直至完全溶解。



(a)　　(b)

图1　(a) 发生空化的螺旋桨；(b) 空化损伤(来源：维基共享资源)

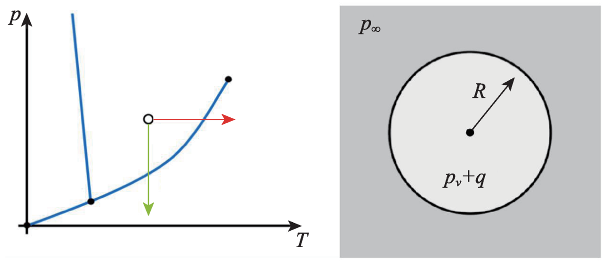


图2 (a) 相图上的空化(向下箭头)和沸腾(向右箭头);(b) 典型的气泡(见表1中的符号)

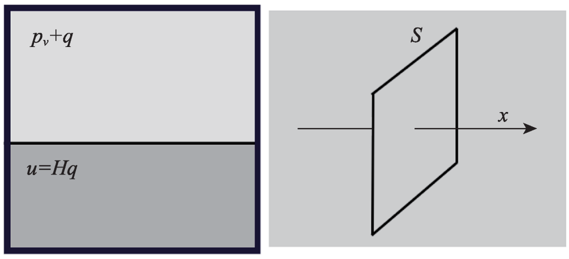


图3 (a) 在平衡状态下,含空气和水的封闭罐子;(b) 通过面S的扩散通量与S上的浓度梯度成正比

事实上,在坍缩的最后阶段,气泡将不再保持球形,而且水的可压缩性也变得重要。不过,我们这里不考虑这些效应,除非个别问题有明确说明。

另一个有趣的问题是,当声波通过含有气泡的水时会发生怎样的现象。事实证明,气泡不仅会随着压力振荡而振动,还会在声波的作用下出现平移。根据这些效应,我们可以借助声波来操纵气泡,例如在声空化中,采用高强度超声波来产生空化或诱导气泡产生坍缩现象。

最后,我们讨论关于空化核最初存在的一种悖论。理论预测,除非水中溶解了足够的空气,否则空化核中的空气将会在几秒内通过气-水界面扩散到水中,导致空化核完全溶解。但事实上,微米大小的空化核可以长期存在于水中,极难去除。关于这一悖论的一种可能解释是:在固体壁或水中携带的固体颗粒中存在一些小裂缝,这些小裂缝可能形成了封闭的气腔,这些气腔可以容纳空气和蒸汽。

可能会用到的信息

蒸汽压

假设我们有一个装有水和空气的封闭罐子。如果罐内的空气过于干燥,则由于水的蒸发,空气湿度会增加;如果罐内的空气过于潮湿,则由于水的凝结,空气湿度会降低。事实证明,在平衡状态下,空气中水蒸气的分压是温度的函数,即$p_v=p_v(T)$。

当气泡的体积瞬间发生变化时,气泡内的湿度不再与周围水的湿度保持平衡,因此必须通过凝结或蒸发的方式来达到新的平衡状态。实际上,上述过程非常迅速,因此我们可以假设在整个过程中系统始终处于平衡状态。此外,在整个过程中,气泡从周围水中吸收或释放的热量可以忽略不计,因此温度保持恒定。最后,我们假设气泡内水蒸气的分压始终保持等于p_v。

亨利定律

通过上述蒸汽压的概念,我们能够很好地处理气泡中的蒸汽含量,而亨利定律则提供了处理空气含量的方法。想象一个包含水和空气的封闭罐子(如图3(a)所示),在平衡状态下,水中溶解的空气浓度与水面上方空气的分压成正比:

$$u = Hq$$

其中,u是水中溶解的空气浓度,H为亨利常数,q是紧邻水的空气分压。同样,根据亨利定律,我们将假设,在平衡状态下,气泡附近区域的空气含量始终保持不变,并且温度也不发生变化。

菲克定律

除了亨利定律,我们还需要了解水中溶解的空气如何从高浓度区域迁移到低浓度区域。这就需要引入菲克定律,即通过面元S的扩散通量与浓度沿垂直于S的方向的变化率成正比(如图3(b)所示):

$$J = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}$$

这里J是扩散通量,即单位时间内通过单位面积的空气含量,κ是扩散系数,我们假设x坐标轴垂直于S。当u是x和其他可能变量的函数时,符号$\frac{\partial u}{\partial x}$表示在保持其他变量不变的情况下对$x$求偏导数。

扩散方程

如果你需要在第一象限$\{Q=(x,t): x>0, t>0\}$中找到一个函数$w=w(x,t)$，满足$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$，且

$$\begin{cases} w(x,0)=f(x) & x>0 \\ w(0,t)=0 & t>0 \end{cases}$$

可解得：

$$w(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^{\infty}\left(e^{-(x-y)^2/4t}-e^{-(x+y)^2/4t}\right)f(y)\mathrm{d}y。$$

高斯型积分

你可能会用到以下积分：

$$\int_0^{\infty}e^{-bx^2},dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}},\int_0^{\infty}x^2e^{-bx^2},dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4b\sqrt{b}}\ (b>0).$$

符号和参数的典型值

在表1中，我们列出了问题陈述中使用的符号以及一些重要常数的典型值。

表1

符号	赋予的含义	典型值
ρ	水的密度	997 kg/m^3
ρ_∞	远离气泡的压强	101 kPa
p_v	蒸汽压	2340 Pa
σ	表面张力	72.8×10^{-3} N/m
R	气泡半径	
R_0	气泡初始半径	10^{-5} m
δ	空气密度	1.29 kg/m^3
q	气泡内的空气分压	
q_0	气泡内空气分压的初始值	
γ	空气的绝热指数	1.4
u	水中溶解空气的浓度	
κ	水中空气的扩散系数	2×10^{-9} m^2/s
H	水中空气的亨利常数	0.24×10^{-6} s^2/m^2
t	时间	
f_0	固有频率	

前提假设

在整个问题中，我们所作的假设有如下几点：

- 水是均匀、不可压缩且无粘性的；
- 水充足整个空间；
- 由于重力引起的压强变化可以忽略不计；
- 温度不随空间和时间变化；
- 存在单个气泡；
- 气泡保持球形且没有平移运动；
- 气泡腔与周围水之间没有空气迁移；
- 空气是理想气体。

A部分：初步分析 [1.5分]

这些是初级问题，旨在初步了解空化现象。

A.1 请你通过简单的量纲分析，估算纯蒸汽气泡的坍缩时间T，要求用气泡的初始半径R_0、水的密度ρ、水压p_∞和蒸汽压p_v表示。假定公式中隐含的数值常数为1，当R_0=1 mm且ρ,p_∞，和p_v取前文参数表中的典型值时，求出坍缩时间T的体体数值。假设没有表面张力，即σ=0。(0.5分)

A.2 假设有一个由空气和蒸汽组成的空化核，半径$R_0=10^{-5}$ m，在外部压强p_∞=101 kPa下处于平衡状态，求气泡内的空气分压q_0。假设外部压强p_∞逐渐减小，且气泡内的空气遵循等温过程，求临界压力p_c的，使得当$p_\infty<p_c$的时，气泡尺寸无限制增长。其中，蒸气压p_v和表面张力σ取前文参数表中的典型值。(1.0分)

提示：

A.1：通过量纲分析，构造具有时间量纲的表达式，估算坍缩时间T。

A.2：根据压强平衡条件和玻意耳定律，推导气泡内空气分压q_0和临界压强p_c的表达式，注意考虑表面张力的影响。

B部分：主要动力学[6.0分]

接下来我们将研究一个由空气和蒸汽组成的球形气泡的详细动力学过程。假设气泡壁间没有空气的迁移，因此整个动力学过程仅由压力决定。值得注意的是，正如我们在前面“蒸气压”部分所提到的，在气泡壁上会有水蒸气的蒸发和凝结来维持气泡内的蒸汽压p_v。

B.1 假设有单个球形气泡位于均匀充足空间的水中，当外部条件如外部压强p_∞发生变化时，气泡的大小会发生变化，但保持球形形状不变。请推导出一个方程，将气泡半径$R(t)$和它对时间的一阶导数$R'(t)$、二阶导数$R''(t)$、表面张力σ、水的密度ρ、外部水压p_∞以及气泡内部的压强p联系起来。假设气泡内既有蒸汽(分压为p_v)又有空气(分压为q)，且空气遵循绝热过程，指数为γ，将压强p分解成两项。作为参考点，当气泡尺寸等于R_0时，空气分压必须为q_0。(1.5分)

B.2 一水箱处于外部压强p_∞=101 kPa下，其中包含一个初始为平衡状态的空化核，半径为$R_0=10^{-5}$ m。现将该水箱置于真空中，即系统的外部压强突然变为零，即p_∞=0的。请估算气泡半径增长速度R'的渐近终值，以及达到该渐近终值所需的时间。(1.0分)

B.3 一水箱处于外部压强p_∞=1.600 kPa下，其中包含一个初始为平衡状态的气泡，半径为$R_0=10^{-5}$ m。现将该水箱置于大气压p_∞=101 kPa下，试估算气泡尺寸反弹前的最小半径。(1.0分)

B.4 如果气泡中除了水蒸气外没有其他气体，则气泡会在有限时间内完全坍缩。试确定$R(t) \sim (T-t)^\alpha$中的标度指数α，其中T是坍缩时间。(0.5分)

B.5 基于在B.3中推导出的方程，求出半径R_0=0.1 mm的气泡发生球形振荡的固有频率。(1.0分)

B.6 若将上一部分描述的气泡置于沿x轴方向的驻波中，驻波的压力场由下式给出：$p(x,t)=p_0+A\sin\left(\frac{2\pi f}{c}(x+a)\right)\sin(2\pi ft)$，其中$f$为频率，$c$为声速。此外，参数$p_0$，$A$和$a$都是常数，它们的含义可以很容易从方程中获得。求作用于气泡上的平均力。已知气泡始于xyz坐标系的原点，其尺寸远小于声波的波长。(1.0分)

提示：

B.1：根据牛顿第二定律和不可压缩条件，逐步推导出气泡动态变化的微分方程。

B.2：基于前面所推导出的方程，先求出R'的渐近终值和初始加速度，再利用初始加速度估算达到该渐近终值所需的时间。

B.3：先将动力学方程转化为能量守恒方程，再利用$R \ll R_0$时的近似处理，可以推导出最小半径表达式。

B.4：利用前面所推导出的R'与R的关系，便可解出标度指数α。

B.5：通过线性化近似，将非线性动力学方程转化为线性微分方程，从而求解气泡的小幅度振荡频率。

B.6：从气泡的动力学方程出发，结合驻波压强场的作用，推导气泡的线性化受迫振荡方程，继而得到气泡体积变化的关系，再算出平均力。

C部分：通过扩散使核溶解 [2.5分]

在最后这一部分，作为B部分的补充，我们重点关注气泡壁上的扩散效应。

C.1 假设一个由空气和蒸汽组成的空化核，半径$R_0=10^{-5}$ m，被放置在水–空气溶液中，其中溶解的空气与水面上的大气压处于平衡状态。气泡中的空气分压为$q=1.70\times10^5$ Pa，蒸汽压可忽略不计。估算气泡完全溶解于水中所需的时间。其中，参量p_∞，κ，δ和σ的典型值见表1。假设气泡周围扩散层的特征尺度远大于其半径。(2.0分)

C.2 考虑一个水容器壁上的圆锥形裂缝，其孔径角为α，见图4。裂缝内有少量的空气和蒸汽。请写出力学平衡条件和扩散平衡条件，并确定在什么情况下气腔会一直保留在裂缝中不消失。已知水在表面上的接触角为θ。(0.5分)

提示：

C.1：先根据亨利定律，计算出气泡内外空气浓

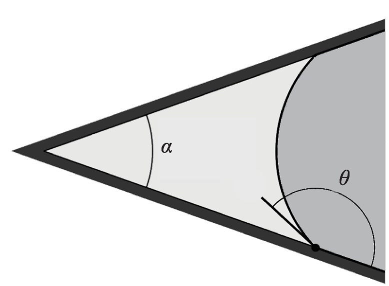


图4 圆锥形裂缝

度差，确定扩散通量的方向；然后利用质量守恒和扩散方程，建立气泡半径随时间变化的关系式；再通过合理近似，最终得出气泡完全溶解所需的时间。

C.2：通过分析裂缝内的气泡在不同情况下(水表面凹入或凸出)的力学平衡条件，确定气腔不消失的条件。结合接触角和孔径角的关系，得出气泡稳定的几何条件。

相关概念介绍

空化现象

空化现象是指由于液体中局部压力下降，导致液体内部形成气泡或“空腔”的现象。这种现象与沸腾不同，沸腾是由于温度上升而产生气泡。当压力恢复时，空化产生的气泡会迅速坍缩，产生冲击波和高速射流。空化现象在工程中既有危害性(如对液压机械和船舶螺旋桨的损害)，也有广泛应用(如化学工业、清洁技术和医学领域中的肾结石治疗)。

气泡动力学

气泡动力学研究气泡在液体中的形成、增长和坍缩过程。气泡的行为受多种因素影响，包括外部压力、液体密度、表面张力和气泡内部的成分(如蒸汽和空气)。气泡的坍缩过程通常伴随着能量的集中释放，可能产生高温和高压，这种现象在声空化和医学超声治疗中有重要应用。

亨利定律

亨利定律描述了气体在液体中的溶解度与气体分压之间的关系。在平衡状态下，液体中溶解的气体浓度与气体在液体表面的分压成正比。亨利定律在分析气泡中空气的溶解和扩散过程中起到关键作用。

菲克定律

菲克定律描述了物质扩散的基本规律，指出扩散通量与浓度梯度成正比。通过菲克定律，可以分析气泡周围空气中溶解气体的扩散过程，进而研究气泡的溶解和稳定性。

表面张力

表面张力是液体表面由于分子间作用力而产生的收缩趋势。在气泡动力学中，表面张力对气泡的稳定性和坍缩过程有重要影响。表面张力越大，气泡越不容易坍缩。

* * * * * * * *

欢迎读者朋友参与“物理奥赛”系列专题的有奖竞答活动，并在答案公布前将您的解答发送至aosai@ihep.ac.cn邮箱。对于参与并答对每期题目的前20名读者，编辑部将赠阅1年《现代物理知识》杂志。

科苑快讯

科学家首次在二维材料中观测到轴子准粒子

近年来，轴子(Axion)这一假想粒子在粒子物理和宇宙学中受到广泛关注。它最初由诺贝尔奖获得者Frank Wilczek和Steven Weinberg于1978年提出，被认为可能解决量子色动力学中的强CP问题，同时也可能构成暗物质的重要成分。然而，由于轴子与常规物质的相互作用极其微弱，至今尚未被直接探测。

近日，美国哈佛大学化学和化学生物学徐苏杨研究团队首次在二维反铁磁拓扑材料 $MnBi_2Te_4$ 中观测到了轴子准粒子的存在。2025年4月16日，相关成果以“Observation of the Axion quasiparticle in 2D $MnBi_2Te_4$”为题，发表于*Nature*期刊。

$MnBi_2Te_4$ 是一种具有层状结构的二维材料，其奇偶层展现出不同的磁性。在偶数层样品中，材料的磁性结构打破了时间反演和空间反演对称性，理论上可支持 θ 角随时间发生震荡。实验结果清晰地展示了 θ 角以约44 GHz(千兆赫兹)频率进行周期性震荡，首次在实验上验证了轴子准粒子的存在。

（摘自：科学网，网址 https://news.sciencenet.cn/htmlpaper/2025/4/20254171011215921317 62.shtm）